Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Serie Documentos de Trabajo

Equilibrio Individual y Equilibrio General en Presencia de Bienes Públicos con Funciones de Utilidad Altruistas: Una Reformulación de las Condiciones Samuelsonianas

Horacio L. P. Piffano

Documento de Trabajo Nro. 92

Septiembre 2012

ISSN 1853-3930

www.depeco.econo.unlp.edu.ar

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Equilibrio individual y equilibrio general en presencia de bienes públicos con funciones de utilidad altruistas: una reformulación de las condiciones samuelsonianas

Dr. Horacio L. P. Piffano
(UNLP)

La Plata, 2012

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

“Equilibrio individual y equilibrio general en presencia de bienes públicos con funciones de utilidad solidarias: una reformulación de las condiciones samuelsonianas”

Dr. Horacio L. P. Piffano
(UNLP)

Resumen

Esta nota pretende arrojar luz respecto a las características y atributos del empleo del método del beneficio en la distribución de las cargas de los impuestos para financiar a los bienes públicos. Se analizan las implicancias de las condiciones samuelsonianas respecto a los criterios de eficiencia y equidad en la imposición, y se adelanta una reformulación de esas condiciones, tendientes a asegurar decisiones colectivas que, honrando y respetando la soberanía de los ciudadanos o votantes, asegure no solo una asignación eficiente sino asimismo equitativa en la distribución de las cargas públicas. En ese sentido, la sustitución de las funciones neoclásicas tradicionales por funciones de utilidad altruistas, puede dar explicación a un resultado “no rival” entre los criterios de eficiencia y equidad en la imposición.

Palabras Clave: Financiamiento de los bienes públicos. Método del beneficio. Decisiones colectivas. Eficiencia y equidad en la imposición.

Código JEL: H41 - Public Goods. H21 - Efficiency; Optimal Taxation- I3 - Welfare and Poverty.

Abstract

This paper aims to clarify the characteristics and attributes of the method of benefit in the distribution of tax burdens to finance public goods. The implications of the Samuelson conditions on the criteria of efficiency and equity in taxation, and a reformulation of these conditions, designed to ensure that collective decisions, while respecting the sovereignty of citizens or voters, ensure not only an efficient allocation, but also an equitable distribution of public burdens. For this, the replacement of traditional neoclassical utility functions by altruistic utility functions can obtain a "non-rival outcome" to ensure, at the same time, criteria of efficiency and equity in taxation.

Keywords: Financing public goods. Benefit method. Public decisions. Efficiency and equity in taxation.

JEL Code: H41 - Public Goods. H21 - Efficiency; Optimal Taxation- I3 - Welfare and Poverty.

Equilibrio individual y equilibrio general en presencia de bienes públicos con funciones de utilidad altruistas: una reformulación de las condiciones samuelsonianas

Dr. Horacio L. P. Piffano
(UNLP)

1. Los bienes públicos, el método del beneficio y la equidad

En la literatura de las finanzas públicas un tema sin dudas central es el análisis de la satisfacción de las necesidades colectivas, las que se atienden mediante la provisión de los bienes públicos. La característica de este tipo de bien (consumo conjunto, economía externa, indivisibilidad del beneficio, no exclusión) ha derivado en la necesidad de recurrir a las ciencias políticas para finalmente poder identificar la manera de asegurar su provisión en la economía.

El tema que fuera muy rigurosa y didácticamente desarrollado por Paul Samuelson, esencialmente en base a un enfoque pareto-eficiente de su provisión, conduce a la necesidad de contemplar la manera o la metodología mediante la cual habrá de ser asignada entre las personas la carga de los impuestos, dada la necesidad de exigir el pago coactivo ante la no revelación de preferencias en el mercado, como ocurre en el caso de los bienes privados.

En vista a la necesidad de establecer el pago coactivo de las contribuciones para financiar los bienes públicos, se han sugerido dos métodos: el método del beneficio y el método de la capacidad de pago.

El método del beneficio plantea que la distribución de la carga de los tributos se corresponda con la manera en que el bien o servicio beneficia a los distintos individuos que componen el grupo social de referencia. Este criterio es el que precisamente permitiría lograr el cumplimiento de las condiciones samuelsonianas que asegurarían la eficiencia asignativa y, asimismo, podría plantearse en términos de una manera de entender la "equidad"; en este caso, entendiendo que lo equitativo es que las personas deban hacerse cargo del costo de los bienes y servicios que mayormente los benefician, a diferencia de otras personas a las que tales beneficios no resulten de significación.

Ahora bien, la idea que la utilidad o beneficio que generan los bienes públicos se derrame a todo el conjunto social, no implica que todos se beneficien de la misma manera. En realidad los beneficios de los bienes públicos resultan indivisibles, a diferencia de los bienes privados en los que las transacciones de mercado permiten dar señales claras de quienes son los consumidores (y pagadores consecuentes) beneficiados con los bienes transados. Pero el derrame de los beneficios de los bienes públicos en cambio no resulta sencillo poder medirlo en términos individuales.

Desde el ángulo de la eficiencia, sin dudas, resulta posible justificar la asignación de las contribuciones entre las personas según el beneficio que les generan. Samuelson ha demostrado con rigor científico y calidad explicativa, que la asignación de impuestos según la "disposición de pago implícita" en el cálculo de preferencias de los ciudadanos votantes, para los cuales define "*seudo-curvas de demanda*", es la manera pareto-eficiente de distribución de las cargas.

Las condiciones "*samuelsonianas*" se pueden encontrar a través del sistema diagramático simple sugerido por Samuelson (1955) y mediante un procedimiento iterativo de sucesivas aproximaciones.[1] El procedimiento diagramático es suponer diferentes niveles de bienes

---

[1] En el **Apéndice** se hace un repaso de los desarrollos formales de las condiciones de óptimo en la provisión de bienes privados y de bienes públicos.

públicos que implican diferentes cantidades a renunciar en bienes privados disponibles para el consumo de dos individuos – dada las posibilidades de producción e ingreso correspondiente que indica la curva de transformación – y para darle una solución única pareto-eficiente, considerar una segunda restricción destinada a asegurar a uno de los individuos un cierto nivel de utilidad.

El análisis de Samuelson, en el modelo simple de dos personas y dos bienes (un bien privado y un bien público), concluye finalmente en la conocida expresión:

$$\mathbf{TMT_{XG} = TMS^{A}_{XG} + TMS^{B}_{XG}}$$

Siendo $\mathbf{TMT_{XG}}$ la tasa marginal de transformación entre bienes privados y bienes públicos, y $\mathbf{TMS^{A}_{XG}}$, $\mathbf{TMS^{B}_{XG}}$, las tasas marginales de sustitución entre bienes privados y bienes públicos de los individuos **A** y **B**, respectivamente.

De las tangentes marcadas en los diagramas que utiliza Samuelson, así como de los desarrollos analíticos para diferentes funciones de utilidad de ambos individuos, habrá de extraerse que:

$$\mathbf{TMS^{A}_{XG} \neq TMS^{B}_{XG}}$$

Resultado que diferencia esta solución al caso de los bienes privados. Y este es un resultado lógico, por cuanto en el caso de los bienes privados la condición de equilibrio requiere la igualación "marginal" de las tasas de sustitución entre bienes a opcionar o elegir, es decir, para el caso de dos bienes privados ($\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$) se cumple:

$$\mathbf{TMS^{A}_{X1,2} = TMS^{B}_{X1,2}}$$

Esa igualación se logra por decisiones voluntarias de **A** y de **B** en el mercado, debido a la posibilidad que tiene cada individuo de dimensionar las cantidades consumidas de cada bien y del hecho que la apropiación plena y exclusiva de una unidad del bien privado implica para cada uno la renuncia de otros bienes privados en cantidades necesarias similares para liberar recursos a fin de ser aplicados a la producción del bien que adquieren.

En el caso de los bienes públicos todos los individuos estarán consumiendo conjuntamente la misma cantidad del bien común, circunstancia que naturalmente arrojará diferentes valoraciones de cada individuo respecto a la utilidad marginal que ese bien público le genera, al tiempo que su financiamiento no requiere renuncias individuales en cantidades totales y similares de los bienes privados alternativos, debido a que el costo de provisión del bien común logra financiarse con la "*suma de las renuncias individuales*" en el total de los bienes privados a dejar de producir para liberar los recursos que exige como costo de oportunidad la provisión del bien común.

Por lo explicado, la utilidad que generan los bienes públicos se derrama a toda la comunidad, pero ello no implica por lo visto igualdad de beneficios para todos. La indivisibilidad del beneficio impide a priori poder conocer quien se beneficia más o menos, razón por la que esta circunstancia aporta una dificultad para poder aplicar estrictamente el principio del beneficio en la provisión de todos los bienes públicos. De allí que Samuelson planteara luego de su demostración analítica el interrogante de cómo poder lograr el cumplimiento de las aludidas condiciones en la práctica.

A pesar de esta dificultad, los sistemas tributarios han podido identificar situaciones donde ello es posible, como es el caso de los caminos financiados con peajes o con impuestos a los combustibles, bien o servicio que la gente se ve obligada de hecho a adquirir como complementario indispensable en su demanda de transporte en carreteras (sea privado o público).

Otro tipo de ejemplo podría ser el diseño de impuestos que tengan una asignación específica a determinados destinos del financiamiento de servicios que permiten razonablemente identificar a sus beneficiarios; tal es el caso como opera la asignación del "*real-estate tax*" (impuesto inmobiliario urbano) en los EE.UU. En ese país, los estados asignan el recaudado del impuesto al distrito escolar de localización de las viviendas, de forma de beneficiar a las familias que viviendo en el distrito envían sus hijos a los colegios de la zona.

Desde el ángulo de la "equidad", sin embargo, existe otra visión del concepto en la tributación diferente al método del beneficio, en tanto ella se interprete que desde el ángulo de la equidad, la distribución de las cargas según los más beneficiados por la provisión del bien o servicio pueda que conduzca a gravar más en gran medida a los grupos pobres de la sociedad. En realidad ello puede resultar factible, pues las condiciones samuelsonianas analizan las condiciones pareto-eficientes en base a la maximización de funciones de utilidad **neoclásicas**, es decir, aquellas funciones que expresan el nivel de utilidad como dependiendo única y exclusivamente de los bienes que cada persona consume y los beneficia personalmente. En el ejemplo de dos personas y dos bienes - uno privado (X) y otro público (G) - serían:

$$\mathbf{U_A = f_A (X^A; G)}$$
$$\mathbf{U_B = f_B (X^B; G)}$$

En las que $\mathbf{X^A}$ es la cantidad del bien **X** consumido por el individuo **A**, $\mathbf{X^B}$ es la cantidad del bien **X** consumido por el individuo **B**, y el bien **G** es el bien público consumido conjuntamente por **A** y **B**. Se trata de la función de utilidad típica del "*homo economicus*" o individuo que solo le interesa su bienestar personal, independientemente de lo que le pueda ocurrir al otro individuo.

Si la sociedad de referencia operara sobre la base de este tipo de comportamiento, es muy probable que el individuo de alto nivel de riqueza le interese menos la provisión de ciertos bienes de consumo conjunto, en tanto, algunos podrían darse el lujo de satisfacerlos mediante recursos propios, a pesar de generar externalidades positivas a terceros, en tanto otros los desestimarían. Ese paquete deseado de bienes privados y públicos, por cierto no serán similares, por lo antes indicado, entre las personas ricas y pobres.

Pero analicemos algo más detenidamente este tema intentando responder la pregunta: ¿Es el método del beneficio realmente incompatible con la equidad?

El método del beneficio en rigor lejos de ser incompatible con el principio de equidad, se puede entender como el método que más se aproxima a una concepción de respeto genuino a la voluntad de los ciudadanos, es decir, a un genuino sistema democrático de consulta permanente a los deseos de los votantes, y el mismo posibilita que la equidad en la distribución de la carga de los impuestos sea calificada por los mismos ciudadanos.

El punto a plantear es **quien o quienes deben ser las personas que deben interpretar lo que se considera justo**: ¿los ciudadanos a través de su voto o la elite gobernante de turno en una actitud paternalista o autocrática – es decir, no fundada de forma genuinamente democrática – en la toma de las decisiones colectivas?

Para explicar este punto veamos dos aclaraciones importantes. Una referida a la diferencia entre bienes públicos y bienes meritorios. La segunda respecto a cómo interpretar la equidad a partir de las preferencias y/o voluntades de los ciudadanos-votantes.

2. Los bienes meritorios

El principio general sobre financiamiento de la producción de bienes desde el ángulo de la eficiencia, es que los bienes o servicios privados, que como tales generan beneficios apropiables y/o internalizables exclusivamente por cada persona o individuo, sin que generen externalidades, se pueden proveer eficientemente a través del sistema de mercado. Por lo tanto su medio de financiamiento es el mecanismo de precios, o sea, mediante el sistema de revelación de preferencias de los individuos, quienes habrán de tener que disponer de su ingreso para obtener la propiedad o apropiación del bien o servicio y, consecuentemente, de la utilidad que el mismo genera. De esa manera se cumple con el respeto pleno a la soberanía del consumidor o ciudadano.

En el caso de los bienes públicos dicha revelación voluntaria no se cumple, dado el principio de no exclusión que se plantea, circunstancia por la cual su provisión se realiza a través del Estado y su financiamiento es coactivo a través de los tributos. La revelación en este caso deberá extraerse del voto de los ciudadanos según las opciones que los postulantes ofrecen en las elecciones.

En el caso de los bienes mixtos – ante la existencia de externalidades positivas – habrán de coexistir el financiamiento vía precio y el subsidio público que implica la necesidad del Estado de obtener recursos vía la tributación coactiva para fondear dicho subsidio. Nuevamente actúan aquí el mercado libre de bienes privados por un lado y el mercado político por el otro.

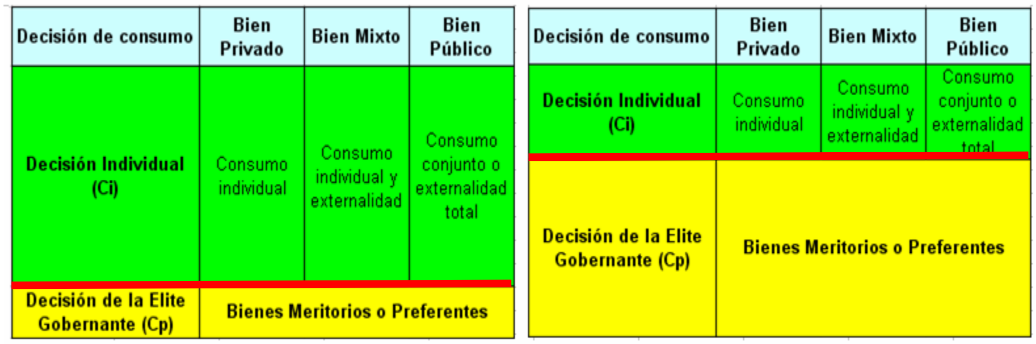
Pero esos principios generales suelen no siempre ser atendidos por los gobiernos en base a las preferencias genuinas de los ciudadanos o votantes y en la práctica se verifican apartamientos de ellos. Los motivos son diversos, pero en muchas circunstancias se suele aducir la prosecución de un “fin redistributivo”, **bajo determinada concepción de lo que el político a cargo de la gestión gubernamental considera justo, y justificable en base a las asimetrías de información que caracterizan a los “mercados imperfectos políticos”**. Aquí aparece la noción de “**bien meritorio**” o “**bien preferente**”.

En el ámbito de esta categoría de bienes suelen estar incluidos los servicios educativos y los de la salud. Pero en otros casos suelen también incluirse otro tipo de servicios o bienes como ser, en orden decreciente en importancia: la canasta básica de consumo de alimentos y medicamentos, la vivienda propia, el acceso a actividades del deporte, el acceso de determinados programas de televisión, etc. Esa apreciación puede bien surgir del voto generalizado o mayoritario de la población, que induce al “votante mediano” a fijar esas pautas o criterios, o por el contrario, puede surgir de la propia elite gobernante o gobierno de turno.

La distinción no es trivial o poco relevante. En el caso de un consenso mayoritario de los votantes, socializar bienes privados o mixtos, habrá de ser entendido como si los votantes interpretan su provisión como equivalente a los bienes públicos, aún cuando “técnicamente” o desde el punto de vista de la teoría económica no puedan calificarse de esa manera. Esa socialización incluso puede plantear un conflicto de orden jurídico si es que constitucionalmente en el grupo social de referencia rige una constitución o contrato social que asegura la propiedad privada y limita el poder de imperio de los gobiernos por establecer gravámenes coactivos a sus ciudadanos. No obstante, viene el caso adelantar aquí una aclaración mayor al concepto de los denominados “*bienes meritorios*”.

La **Figura 16, a) y b),** presenta una división conceptual entre bienes privados, bienes mixtos, y bienes públicos, agrupados en la línea horizontal superior (sobre la línea roja), respecto de los bienes preferentes o meritorios, ubicados en la línea horizontal inferior (debajo de la línea roja).

Los bienes ubicados arriba de la línea roja, tienen una diferencia que deriva de sus propiedades en cuanto a satisfacer necesidades individuales o bien mixtas y, finalmente, colectivas. Pero tienen un denominador común: que la decisión de su consumo la deciden los individuos por opción libre, es decir, en todos los casos se está respetando la "soberanía del consumidor o ciudadano"; la decisión del consumo de estos bienes es individual, no obstante estar destinados unos u otros a satisfacer necesidades diferentes. En el caso del bien privado el ciudadano ejerce su libertad de elección votando con su ingreso en los mercados; en los bienes mixtos ejerce también su libertad votando asimismo con su ingreso en los mercados y votando en las urnas por lo que corresponda al componente de subsidio; en los bienes públicos, finalmente, ejerce su libertad de opción votando en las urnas por lo que desee en materia del residuo fiscal de su preferencia.



(a) **(b)**

Figura 16

La decisión de consumo en el caso de los bienes meritorios o preferentes en cambio es atribuible al criterio del gobernante de turno, quien asume un rol paternalista o autocrático-dictatorial, decidiendo qué bienes premiar o inclusive obligar a su consumo (los bienes "buenos") y desalentando o inclusive prohibiendo el consumo de otros (los bienes "malos").

Este comportamiento gubernamental suele justificarse básicamente en razón de fuertes imperfecciones de los mercados, particularmente referidos a los problemas de información, y que dan pie a que el gobernante de turno, que sí cuenta con información relevante al caso, adopte ese temperamento.

Sin dudas que este comportamiento del Estado supone un escenario de "*gobierno benevolente*", aquel cuyas decisiones solamente son inspiradas por el objetivo de maximizar el bienestar general de los ciudadanos, y no necesariamente sus propias ambiciones, deseos o gustos específicos. Las asimetrías de información son una característica normal o usual de cualquier relación de agencia. El sistema político constituye un caso relevante de tal asimetría y conlleva así a la posibilidad de adoptar tal tipo de decisión, aún en escenarios considerados razonablemente democráticos y respetuosos de la libertad de las personas.

Por cierto que la línea roja de separación indicada en la figura, deja nuevamente márgenes importantes de apreciación o subjetividad. Lo que si queda claro es que los gobiernos más democráticos y respetuosos de la libertad y soberanía de los pueblos, habrán de no escatimar esfuerzos para mejorar la transparencia informativa de forma de ir reduciendo las aludidas asimetrías. La educación de la población juega un rol significativo en reducir esas asimetrías. El resultado final de este accionar es el graficado en la **Figura 16 (a)**.

Los gobiernos con tendencias dictatoriales o autocráticas, en cambio, aprovecharán al máximo esas asimetrías, mal informando y/o no dando educación sin sesgos deliberados a sus gobernados, y de esta manera justificar un margen enorme de discrecionalidad en las decisiones. El resultado final de este accionar es el graficado en la **Figura 16 (b)**.

Ambas versiones **(a)** y **(b)** de la **Figura 16** resumen visualmente por tanto las proporciones diferenciales que pueden asumir ambas maneras de entender políticamente la naturaleza de las decisiones sociales.

Una aclaración necesaria, aunque puede calificarse de obvia, es que los bienes buenos y los bienes malos que defina la elite gobernante pueden tener características de bienes privados, de bienes mixtos o de bienes públicos, de manera que la decisión de su provisión no tiene ninguna relación con esa categorización.

Las aclaraciones previas son importantes en tanto en muchas exposiciones de expertos, incluyendo algunos economistas, suele detectarse el entender a los bienes llamados meritorios o preferentes el atributo de generar beneficios sociales importantes (¿externalidades positivas?) y por tanto, justificar o impulsar su desarrollo. Esto resulta un equívoco muy grave, pues la presencia de beneficios sociales no apropiables individualmente son los ya explicados en el caso de los bienes mixtos y de los bienes públicos y no tienen nada que ver con su calificación de "meritorios".

El atributo de los bienes preferentes se refiere por tanto a otro concepto, ligado a los problemas de información y quizás más a razones de orden político que económico. En las democracias republicanas modernas, se intenta que el poder supremo del que gozaban los monarcas antiguamente, queden restringidos o acotados en su discrecionalidad, garantizando el pleno goce de la soberanía de los ciudadanos, pero no siempre este principio habrá de verificarse en la práctica.

3. El componente de equidad en las funciones de utilidad de las personas

La segunda cuestión es la referida a las funciones de utilidad de las personas. Si se interpreta que las personas no son ajenas a la suerte que corran sus vecinos o conciudadanos, uno puede presentar funciones de utilidad representativas de tal tipo de sociedad en las cuales en las funciones de utilidad individuales va a aparecer como argumento adicional el bienestar de los otros. Veamos la siguiente explicitación de la función a la que estamos aludiendo, referida a uno de los individuos (**A**):

$$\mathbf{U_A = f_A\,(X^A;\,G;\,Y^B)}$$

Donde,

$$\mathbf{\partial U_A/\partial Y^B > 0}$$

O sea, al individuo **A** le preocupa o interesa la situación de **ingreso de B** y **su aumento mejora su propio bienestar**. El modelo de optimización podría eventualmente plantearse introduciendo entonces una restricción en la que se postule que **A** intentaría maximizar su bienestar (función de utilidad neoclásica) pero sujeto a que:

$$\mathbf{Y^B \geq Y^*}$$

Siendo **Y*** el nivel mínimo de ingreso que **A** entiende equitativo garantizar a **B**.

En ambos casos, es indudable que **A**, al votar y de esta manera, revela indirectamente su tasa marginal de sustitución entre los bienes privados y los bienes públicos, que habrá de computar esta externalidad que aparece en su función de utilidad, votando por gobiernos en los que muy probablemente le hagan tributar más allá de lo que él percibe como compensado o no por el beneficio que recibe de la política fiscal ("residuo fiscal negativo", en sentido neoclásico)[2]. En

---

[2] El concepto "*residuo fiscal*" - adelantado por Buchanan (1950) - expresa la diferencia entre el beneficio que el ciudadano percibe recibir del gasto público, por la provisión de los bienes públicos, menos el costo de oportunidad que enfrenta con el pago de sus impuestos.

mis clases suelo mencionar a ese argumento de la función de utilidad como "*el componente Madre Teresa*" de la función de utilidad de los ciudadanos.

Cuando esa preocupación por el bienestar de los demás es muy generalizada, es decir, cuando la gran mayoría de los votantes tiene similar percepción de la equidad, entonces estaremos frente a una sociedad solidaria, cuyo accionar deriva de funciones de utilidad altruistas en las que el concepto de la redistribución a favor de los pobres puede entenderse como un bien público, con derrames generalizados al total del colectivo.

En caso en que los gobiernos de turno no respeten lo que se supone derivado del proceso del voto democrático, estarían actuando en el campo de los bienes meritorios o preferentes en los que prima la interpretación autocrática del gobernante, más allá de lo que opinen sus electores. Esta diferenciación entre bienes privados y públicos – en los que se respeta la soberanía del consumidor o ciudadano, en los primeros derivados del proceso de decisiones descentralizadas de los individuos aplicando su ingreso a los bienes de sus preferencias en los mercados y los segundos a través de su voto en las urnas – respecto de los preferentes habrá de entenderse por tanto, como ya se aclarara, como consecuencia de un escenario de información y/o transparencias imperfectas en los mercados privado y público.

En conclusión, de estar en presencia de un escenario de reconocida solidaridad social y razonable escenario en materia de información, es probable que las condiciones de equilibrio samuelsonianas coincidan con resultados redistributivos que induzcan a una tributación de forma no equivalente o no proporcional entre individuos de diferentes niveles de riqueza. Los individuos más ricos verán que su residuo fiscal es en principio negativo computando su propio bienestar, pero que puede resultar en equilibrio al ponderar en su función de utilidad el efecto de la política fiscal en mejorar la situación de los más pobres. El método del beneficio según las condiciones samuelsonianas redefinidas en las funciones de utilidad de las personas no es por tanto incompatible con la equidad.

Finalmente, es probable no obstante que la decisión política coincida finalmente con las preferencias del votante mediano[3] – dado el supuesto restrictivo y poco realista de un consenso unánime por la redistribución a favor del pobre – y en tal caso, una porción del electorado vivará necesariamente en una situación de permanente desequilibrio samuelsoniano.

4. Un desarrollo analítico del equilibrio del consumidor-ciudadano con funciones de utilidad altruistas

Por lo planteado, si la redistribución es considerada como una externalidad positiva por los individuos que componen la sociedad, las funciones de utilidad tendrían una configuración diferente a las empleadas en el enfoque neoclásico tradicional.

En efecto, si la función de utilidad de los ricos (supóngase el individuo **A**) fuera del tipo:

$$\mathbf{U_A = f_A\,(X^A{}_1;\, X^A{}_2;\, G;\, Y_B)}$$

Si a su vez $\mathbf{Y^{Mín}}$ fuera el ingreso mínimo considerado como umbral de la pobreza, y se cumpliera que $\mathbf{Y_B < Y^{Mín}}$, entonces es probable que:

$$\mathbf{\partial U_A/\partial Y_B > 0}$$

Y, en tal caso, el individuo **A** podría estar dispuesto a pagar un impuesto mayor que el estrictamente requerido por su situación de bienestar individual, aquel nivel de tributación que lo dejaría con un "residuo fiscal" neto igual a cero. Quizás acepte un residuo fiscal negativo de

[3] Desarrollos sobre este tema ligado a la toma de las decisiones colectivas se analizan en Piffano (2012).

computarse solamente su propio bienestar y de todas maneras estar en equilibrio samuelsoniano bajo una reformulación de su función de utilidad cuando la situación del pobre se modifique; su residuo fiscal no sería por tanto negativo.

En términos analíticos, supóngase la siguiente función de utilidad del individuo **A**:

(1) $\mathbf{U_A = f_A\,(X^A;\, G;\, Y_B)}$

Que computa como argumentos su consumo de bienes privados ($\mathbf{X^A}$), su consumo de bienes públicos (**G**) y la situación de bienestar del individuo **B**, representado por su nivel de ingreso ($\mathbf{Y_B}$). Los tres argumentos cumplen la condición de primera derivada positiva, o sea: $\mathbf{\partial U_A/\partial X^A > 0;\ \partial U_A / \partial G > 0,\ y,\ \partial U_A / \partial Y_B > 0}$.

La optimización del bienestar del individuo **A**, enfrenta ahora dos restricciones: la de su ecuación de presupuesto y la de preocupación por los pobres, es decir:

(2) $\mathbf{Y_A \geq P_A.X_A + T_A.G}$

(3) $\mathbf{Y^{Mín} - Y_B \geq 0}$

Siendo $\mathbf{Y^{Mín}}$ el ingreso mínimo de subsistencia digno para **B**, según lo considera el individuo **A**, en tanto $\mathbf{Y_B}$ es el ingreso disponible de **B**. De manera que:

(4) $\mathbf{Y_B = Y^B{}_T - (T_B\,.G)}$

O sea, el ingreso disponible de **B** es igual al ingreso total ($\mathbf{Y^B{}_T}$) descontado el pago de sus impuestos al Estado ($\mathbf{T_B\,.G}$)

Construyendo la función auxiliar:

(4) $\mathbf{\mathcal{L} = f_A\,(X^A;\, G;\, Y_B) + \lambda_y\,(Y_A - P_A.X_A + T_A.G) + \lambda_B\,[Y^{Mín} - Y^B{}_T + (T_B\,.G)]}$

Hallando las condiciones de primer orden:

(5) $\partial\mathcal{L} / \partial X^A = f\,'_{(X)} - \lambda_y.\, P_A = 0$

(6) $\partial\mathcal{L} / \partial G = f\,'_{(G)} - \lambda_y\, T_A.+ \lambda_B\, T_B = 0$

(7) $\partial\mathcal{L} / \partial Y_B = f\,'_{(YB)} - \lambda_B = 0$

(8) $\partial\mathcal{L} / \partial \lambda_y = Y_A - P_A.X_A + T_A.G$

(9) $\partial\mathcal{L} / \partial \lambda_B = [Y^{Mín} - Y^B{}_T + (T_B\,.G)]$

Despejando de la **(5), (6) y (7)**:

(10) $f\,'_{(X)} = \lambda_y.\, P_A$

(11) $f\,'_{(G)} = \lambda_y\, T_A - \lambda_B\, T_B$

(12) $f\,'_{(YB)} = \lambda_B$

Dividiendo la **(11)** por la **(10)** y sustituyendo $\mathbf{\lambda_B}$ según la **(12)**:

(13) $f'_{(G)} / f'_{(X)} = (\lambda_y.T_A - f'_{(YB)}.T_B) / (\lambda_y. P_A)$

O sea:

(14) $f'_{(G)} / f'_{(X)} = (T_A / P_A) - [(f'_{(YB)}/\lambda_y). (T_B/ P_A)]$

Pero $\boldsymbol{\lambda_y}$ es el multiplicador lagrangeano que representa la utilidad marginal del ingreso propio para el individuo **A**, de manera que la **(14)** puede expresarse como:

(15) $\mathbf{f'_{(G)} / f'_{(X)} = (T_A / P_A) - [(f'_{(YB)}/f'_{(YA)}) . (T_B/ P_A)]}$

Finalmente, si adoptamos a $\mathbf{P_A}$ como *numéraire*, haciendo $\mathbf{P_A = 1}$; a su vez, definimos a $\mathbf{TMSS^A_{XG}}$ **(= -ΔX / ΔG)** como la "*Tasa Marginal de Sustitución Social*" *para* ***A*** *entre los bienes privados y los bienes públicos;* y, finalmente, si definimos como **β** al cociente entre las tasas marginales de utilidad del ingreso propio de **A,** respecto a la *utilidad marginal del ingreso de* **B** *para el individuo* **A,** es decir:

(16) $\mathbf{f'_{(YB)}/f'_{(YA)} = \beta}$

Entonces la **(15)** se puede expresar ahora como:

(17) $\mathbf{TMSS^A_{XG} = T_A - (\beta.T_B)}$

¿Qué significa la expresión **(17)**?

Que ahora la tasa marginal de sustitución entre bienes privados y bienes públicos para el individuo **A** – la inversa del cociente de las respectivas utilidades marginales indicado en el primer miembro de la expresión (15) – sería igual al costo relativo del bien público que habría de soportar en términos de los impuestos que habrá de pagar, descontado su consideración especial respecto al bienestar de los pobres (representados en este caso por el individuo **B**) al momento de tener que pagar también sus impuestos.

Resulta sencillo concluir en que:

$$\mathbf{TMSS^A_{XG} < TMS^A_{XG}}$$

Es decir, el *sacrificio* que en el margen representa para **A,** en términos de renuncia al consumo de bienes privados por contar con la provisión de los bienes públicos, resulta ahora menor que el que percibiría con una función de utilidad neoclásica.

En efecto, ello queda claro analizando el significado del segundo sumando que resta a ese costo de oportunidad de los bienes públicos para **A**, y que aparece en el segundo miembro de la expresión **(17)**.

La relación **β** constituye un coeficiente que mide el peso relativo que en la función de bienestar del individuo **A** tiene la situación de bienestar de **B**. Se trata del ponderador con el que **A** medirá su sacrificio relativo (pérdida de su utilidad marginal personal) que estará dispuesto a asumir haciéndose cargo de una parte del costo de oportunidad de la porción tributaria que le tocaría enfrentar **B** para la provisión de los bienes comunes.

Esta es finalmente la **incidencia** del **"*componente Madre Teresa*"** que nida en el alma de **A**. Es su espíritu altruista o solidario para con **B**; una externalidad que acusa tener su función de utilidad (interdependiente) respecto a la función de utilidad de **B**.

Ahora bien, la relación que expresa el coeficiente de ponderación **β** podría variar, resultando:

$$\mathbf{0 \leq \beta \leq 1}$$

En la medida que el ponderador **β** se acerque a **1** estará indicando una muy fuerte consideración de **A** hacia el pobre. Su percepción del costo de oportunidad de la provisión de los bienes públicos tendería a **0**. Es en ese extremo que la actitud merecería sin duda alguna el calificativo de "*componente Madre Teresa*"; un enfoque *Rawlsiano* de maximización del bienestar de los pobres. Si en cambio, el ponderador **β** se acercara a **0**, estará evidenciando que el bienestar propio de **A** predomina en él por sobre el bienestar de **B**, aunque de alguna manera puede que le importe algo. En el extremo del ser egoísta (al estilo neoclásico del *homo economicus*) el costo de oportunidad de los bienes públicos solamente computará a $\mathbf{T_A}$, es decir, la solución samuelsoniana tradicional; un enfoque *benthamiano* en materia distributiva del ingreso.[4]

En el caso altruista o solidario entonces, el individuo **A** puede que aparente tener un residuo fiscal negativo, pero si existe el componente solidario, en realidad se encontrará en equilibrio samuelsoniano.

5. Conclusiones y reflexiones finales

Por lo expuesto previamente, el método del beneficio parece haber logrado su reivindicación y revalorización: eficiencia más equidad y respecto a la soberanía del ciudadano (¿¡"doble o triple dividendo"!?).

No obstante, tres aclaraciones finales.

1º) La redistribución a través de la asignación de las cargas tributarias y del gasto público que no tenga en cuenta o se base en una actitud voluntaria y altruista de los ciudadanos, implicará una redistribución "meritoria" o "preferente", es decir, autocráticamente definida por la elite gobernante, no respetando con fidelidad la voluntad de los electores.

2º) En el caso del respeto a la soberanía de los votantes, es probable que la decisión política coincida finalmente con las preferencias del "votante mediano" y, en tal caso – dejando fuera el supuesto restrictivo y poco realista de un consenso unánime por la redistribución a favor del pobre – una porción del electorado vivará necesariamente en una situación de permanente desequilibrio samuelsoniano.

3º) Aún cuando la porción de los ciudadanos que puedan percibir como negativo su residuo fiscal fuera una minoría, la decisión de la mayoría votante , en base a su interpretación de lo que esa mayoría considera justo, no puede sin embargo violar los derechos de propiedad que garantiza la constitución. Aplica aquí la noción de justicia *rawlsiana* respecto al "velo de la ignorancia" y el dilema de Condorcet con el resultado circular de los procesos de votación por mayoría simple y la solución "*a lo Buchanan y Tullock*" del dilema y la búsqueda de la unanimidad *wickselliana* mediante el respeto a una "regla de nivel superior"; a saber:

a) **Regla rawlsiana**: "*podemos determinar lo que es un principio de justicia para la sociedad si nos imaginamos a nosotros mismos detrás de* ***un velo de ignorancia*** *tal*

[4] En alguna medida el coeficiente **β** expresaría una ponderación inversa a la del coeficiente **α** empleado en la fórmula de medición del coeficiente de desigualdad de Atkinson (ver Piffano, 2012), quien en rigor utilizara en su *paper* el ponderador **1-ε**, o sea, **α = 1-ε**, es decir:

$$A = 1 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$$

Siendo μ el ingreso medio, y_i el ingreso individual (i = 1, 2,..., N).

que no sabemos qué persona seremos en la sociedad, por lo cual escogeremos algo que será justo ***para quien sea que podamos ser***".

b) **Regla Buchanan-Tullock**: "*….sería más fácil obtener un acuerdo o consenso,* ***moviéndonos hacia la unanimidad****, al nivel de fijar las reglas bajo las cuales se desarrolla nuestra actividad política*". "*Mientras se tenga* **una constitución** *con la cual las personas están en consenso básico, se puede procurar ciertos resultados en términos de las* ***reglas operativas que la constitución permite desarrollar***". De acuerdo a ello: "*Desplazamos la norma wickselliana hacia el nivel constitucional y argumentamos que, de hecho,* ***es más probable alcanzar un acuerdo a ese nivel por la sencilla razón de que las personas no conocen el impacto que una regla particular tendrá sobre su interés personal identificable***".Finalmente, coincidiendo con Rawls se afirma: "…***estamos analizando una regla particular que limitará los patrones de los resultados políticos. Mientras no sepamos cómo nos impacta esa regla, mientras exista esa incertidumbre, es más probable que logremos un acuerdo al nivel constitucional. Es más probable alcanzar un consenso cuanto más elevada sea la regla***".

La moraleja final: no sabremos a ciencia cierta si seremos ricos o pobres en un futuro no muy lejano, o si formaremos parte de una minoría o de una mayoría circunstancial que decide quien deba gobernar; por esa razón, es sensato y justo que aceptemos reglas mínimas de convivencia para nosotros y para nuestros descendientes, estables y perdurables. El *enforcement* de esas reglas es crucial y, en este sentido, el diseño institucional en general y la Justicia y la moral del conjunto social – gobiernos y ciudadanos – en particular, juegan un rol determinante.[5] La permanencia de las reglas y su *enforcement* será la única garantía de nuestro esfuerzo por progresar en familia y en sociedad, con libertad y con el respecto al fruto de dicho esfuerzo.

Referencias

Atkinson, A. B. (1970): "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory*, 3, 244-263.

Buchanan, J. (1950): "Federalism and Fiscal Equity", *American Economic Review*, Vol. XL Nº 4, September.

Buchanan, J. y Tullock, G. (1962): "*The calculus of consent*", University of Michigan Press.

Piffano, H. L. P. (2012): "*Análisis Económico del Derecho Tributario*", Centro de Estudios de Derecho y Economía, Facultad de Derecho, UBA.

Samuelson, P. A. (1954): "The Pure Theory of Public Expenditure", *Review of Economic and Statistics*, September.

Samuelson, P. A. (1955): "Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure", *Review of Economic and Statistics*, November.

Rawls, J. (1971): "*A Theory of Justice*". Traducido y Editado por Fondo de Cultura Económica, año 1975.

[5] Ver Piffano (2012), op. cit.

Apéndice

Condiciones paretianas de maximización del bienestar

1. Optimización: planteo general

Dada la función:

$$y = f(x)$$

la condición de primer orden exige:

$$\partial y/\partial x = y' = f'_x = 0$$

y la condición de segundo orden:

$$\partial^2 y/\partial x^2 = y'' = f''_x > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\partial^2 y/\partial x^2 = y'' = f''_x < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

2. Ejemplo de Optimización: máximos y mínimos “no condicionados”

$$(MAX)\ \Pi = (P * X) - C\ (X)$$

siendo,

Π: Beneficio
P: Precio
X: Cantidad del bien
C (X): Función de costo total

Condición de Primer Orden:

$$\partial \Pi/\partial X = P - \partial C/\partial X = 0 \rightarrow \quad P = CMg \ \text{(Precio = Costo Marginal)}$$

Condición de segundo orden:

$$\partial^2 \Pi/\partial X^2 = 0 - \partial^2 C/\partial X^2 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

3. Ejemplo de Optimización Condicionada (Máximos y Mínimos Condicionados)

$$(MAX)\ \Pi = (P * X) - C\ (X)$$

sujeto a:

$$F° - C(X) \geq 0$$

Siendo:

F°: Capital financiero disponible

Construyendo la función auxiliar $\mathcal{L}$ ("*lagrangeano*"):

$$\mathcal{L} = P * X - C(X) + \lambda_F \, [F^{\circ} - C(X)]$$

Condición de Primer Orden, con "restricción operante" ($\mathcal{L} > 0$):

$$\partial\mathcal{L}/\partial X = P - \partial C/\partial X + \lambda_F \, (-\partial C/\partial X) = 0$$

o sea,

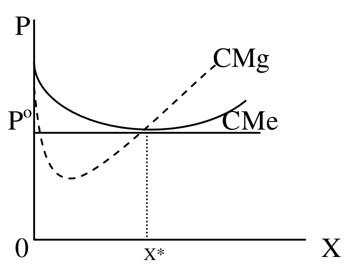
$$P = CMg\,(1 + \lambda_F)$$

Condición de segundo orden:

$$\partial^2\mathcal{L}/\partial X^2 = 0 - \partial^2 C/\partial X^2 - \lambda_F \, (\partial^2 C/\partial X^2) < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

Diagramáticamente:

Optimización no condicionada (Primer mejor)

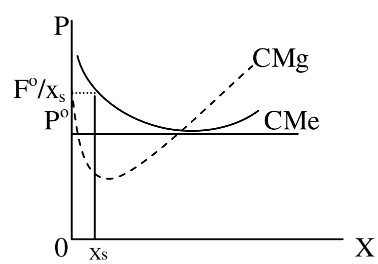


x^*: nivel óptimo de producción

$P^o = CMg_{(X^*)}$

$P^o - CMg_{(X^*)} = 0$

Optimización Condicionada (Segundo mejor)



x_s: nivel óptimo secundario

$P = CMg\,(1 + \lambda_F)$

$P - CMg = CMg * \lambda_F > 0$

4. Optimización en el consumo de bienes privados "sin mercado"

Dados dos individuos y dos bienes privados[6] y ausencia de mercado. El consumo óptimo se obtiene de la consideración conjunta de ambos individuos y ambos bienes. Se trata de una solución simulada equivalente a la existencia de un planificador central que posee toda la información necesaria para maximizar las posibilidades de consumo de esta comunidad de dos individuos.

$$U_A = f_A\,(x^A{}_1;\, x^A{}_2)$$
$$U_B = f_B\,(x^B{}_1;\, x^B{}_2)$$

son las funciones ordinales de utilidad de ambos individuos y,

$$X^o{}_1 = x^A{}_1 + x^B{}_1$$
$$X^o{}_2 = x^A{}_2 + x^B{}_2$$

---

[6] "Bienes privados" o bienes de consumo individual, rivales en el consumo, cuya utilidad es apropiable únicamente por un individuo, excluyendo la posibilidad de consumo y apropiación de utilidad consecuente del resto de los individuos.

las cantidades de los bienes disponibles para el consumo de ambos individuos.

El planteo del problema de optimización es:

(MAX) U_A

Sujeto a:

(1º) $X^o{}_1 - x^A{}_1 - x^B{}_1 = 0$
(2º) $X^o{}_2 - x^A{}_2 - x^B{}_2 = 0$
(3º) $U_B = U^o{}_B$; o sea: $U^o{}_B - f_B\,(x^B{}_1;\, x^B{}_2) = 0$

La tercera restricción responde a la necesidad de definir una única solución o situación de óptimo en el consumo (un punto de la curva de contrato en el consumo), mediante la definición normativa del nivel de utilidad que se desea asegurar a uno de los individuos (en este caso el individuo B). El problema reside entonces en maximizar la utilidad del individuo A sujeta a la disponibilidad de los bienes X_1 y X_2 y al nivel de utilidad ($U^o{}_B$) que se le garantiza al individuo B.

La función auxiliar:

$$\mathcal{L} = f_A\,(x^A{}_1;\, x^A{}_2)+\lambda_1(X^o{}_1 - x^A{}_1 - x^B{}_1)+\lambda_2\,(X^o{}_2 - x^A{}_2 - x^B{}_2)+\lambda_B(U^o{}_B - f_B\,(x^B{}_1;\, x^B{}_2)$$

Verificación de las condiciones de primer orden para (MAX) $\mathcal{L}$:

(1) $\partial\mathcal{L}/\partial x^A{}_1 = f\,'_{(x^A{}_1)} - \lambda_1 = 0$

(2) $\partial\mathcal{L}/\partial x^A{}_2 = f\,'_{(x^A{}_2)} - \lambda_2 = 0$

(3) $\partial\mathcal{L}/\partial x^B{}_1 = - \lambda_1 - \lambda_B f\,'_{(x^B{}_1)} = 0$

(4) $\partial\mathcal{L}/\partial x^B{}_2 = - \lambda_2 - \lambda_B f\,'_{(x^B{}_2)} = 0$

(5) $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_1 = X^o{}_1 - x^A{}_1 - x^B{}_1 = 0$

(6) $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_2 = X^o{}_2 - x^A{}_2 - x^B{}_2 = 0$

(7) $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_B = U^o{}_B - f_B\,(x^B{}_1;\, x^B{}_2) = 0$

De (1) y (2):

$\lambda_1 = f\,'_{(x^A{}_1)}$
$\lambda_2 = f\,'_{(x^A{}_2)}$

De la (3):

$\lambda_B = - \lambda_1/\, f\,'_{(x^B{}_1)} = - \lambda_2/\, f\,'_{(x^B{}_2)}$

Sustituyendo por la (1) y la (2):

$\lambda_B = - f\,'_{(x^A{}_1)} \;/\; f\,'_{(x^B{}_1)}$
$\lambda_B = - \; f\,'_{(x^A{}_2)} \,/\, f\,'_{(x^B{}_2)}$

Es decir,

$$(f\,'_{(x^A{}_1)}/f\,'_{(x^A{}_2)}) = (f\,'_{(x^B{}_1)}/f\,'_{(x^B{}_2)}) = \lambda_1/\lambda_2$$

En el nivel de consumo óptimo de ambos bienes por ambos individuos, se cumplirá la condición de la igualación de las razones entre las respectivas utilidades marginales obtenidas en el consumo de tales bienes por ambos individuos.

El alumno debe recordar el cociente λ_1/λ_2 para cuando se analice la optimización CON MERCADO. Esta razón entre los λs miden el costo relativo de oportunidad, es decir, los respectivos valores sombra, precios imputados o precios matemáticos (denominaciones alternativas) de los bienes x_1 y x_2.

El significado económico implícito de los multiplicadores de lagrange es preciso: se trata del valor incremental que lograría la función objetivo (U^*_A) optimizada si se relajara en el margen el nivel de la restricción que establece la cantidad fija de los dos bienes disponibles para el consumo. Si se asume que las cantidades totales de x^o_1 y x^o_2 pudieran variar, por ejemplo, aumentar en un cierto margen, las derivadas de estos "parámetros" que se transformarían de esta manera en "variables" con respecto a la función auxiliar daría:

$$\partial\mathcal{L}/\partial x^o_1 = \lambda_1$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x^o_2 = \lambda_2$$

Por otro lado, si se calcula el diferencial total de las funciones de utilidad de los individuos A y B y se los iguala a 0 (para identificar el sentido económico de los movimientos en determinado nivel de las respectivas curvas de indiferencia):

$$dU_A = f\text{'}_{(x^A{}_{1})}.dx^A{}_1 + f\text{'}_{(x^A{}_{2})}.dx^A{}_2 = 0$$
$$dU_B = f\text{'}_{(x^B{}_{1})}.dx^B{}_1 + f\text{'}_{(x^B{}_{2})}.dx^B{}_2 = 0$$

se obtienen las Tasas Marginales de Sustitución entre ambos bienes (X_1 y x_2) de ambos individuos ($TMS^A{}_{x1x2}$; $TMS^B{}_{x1x2}$). De donde se cumple entonces que:

$$TMS^A{}_{x1x2} = TMS^B{}_{x1x2} = \lambda_1/\lambda_2$$

O sea:

$$-(dx^A{}_2/dx^A{}_1) = -(dx^B{}_2/dx^B{}_1) = (f\text{'}_{(x^A{}_{1})}/f\text{'}_{(x^A{}_{2})}) = (f\text{'}_{(x^B{}_{1})}/f\text{'}_{(x^B{}_{2})}) = \lambda_1/\lambda_2$$

Se observa que las Tasas Marginales de Sustitución son inversamente proporcionales a las relaciones de las Utilidades Marginales en el consumo de ambos bienes para ambos individuos, razón que habrá de igualar al precio relativo implícito (o imputable por ellos) entre ambos bienes (el dual de la optimización por cantidades).

5. Optimización en el consumo de bienes privados "con mercado"

En el modelo de mercado el cálculo económico es individual. Como ajustadores de cantidades, cada individuo adopta su decisión sobre las cantidades a consumir de ambos bienes según sus preferencias, precios relativos observados y nivel de ingreso disponible, con independencia y/o conocimiento de lo que hace o hará el otro individuo. Por lo tanto, no es necesaria la consideración conjunta de ambos individuos. A pesar de ello, en este modelo descentralizado se observará que las conductas individuales conducen a equilibrios marginales similares entre todos los individuos.

Simulando al individuo A, los datos necesarios son:

$$U_A = f_A\,(x^A{}_1;\, x^A{}_2)$$
$$Y^o{}_A = P_1.X_1 + P_2.X_2$$

Donde $Y^o{}_A$ es el "ingreso disponible" del individuo A, y el problema de optimización se define como:

(MAX) U_A
sujeto a:
$Y^o_A - P_1.X_1 - P_2.X_2 = 0$

La función auxiliar:

$$\mathcal{L} = f_A(x^A_1; x^A_2) + \lambda_y (Y^o_A - P_1.X_1 - P_2.X_2)$$

Las condiciones de primer orden indican que:

$$\partial\mathcal{L}/\partial x^A_1 = P_1 - \lambda_y f'_{(x^A_1)} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x^A_2 = P_2 - \lambda_y f'_{(x^A_2)} = 0$$

de donde:

$$P_1 = \lambda_y f'_{(x^A_1)}$$
$$P_2 = \lambda_y f'_{(x^A_2)}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$P_1/P_2 = f'_{(x^A_1)} / f'_{(x^A_2)}$$

Por otro lado, diferenciando la función de utilidad e igualando a 0 para obtener la TMS^A_{x1x2}:

$$TMS^A_{x1x2} = -(dx^A_2/dx^A_1) = f'_{(x^A_1)} / f'_{(x^A_2)} = P_1/P_2$$

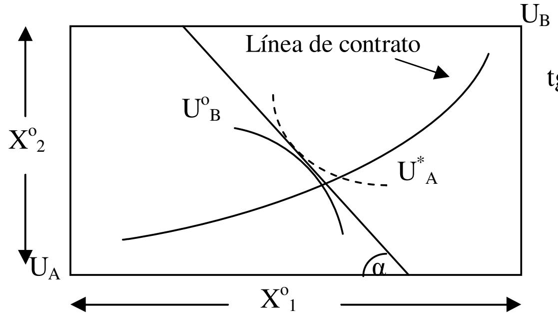
El individuo A optimiza su consumo igualando su TMS entre ambos bienes a la inversa de la razón entre las utilidades marginales de los bienes – es decir – similar resultado al encontrado en la simulación del caso SIN MERCADO, pero en este caso con referencia a los precios relativos del mercado entre ambos bienes.

El individuo B - observando los mismos precios que observa el individuo A - también alcanzará su equilibrio igualando su TMS^B_{x1x2} con la inversa de los precios relativos (P_1/P_2). De manera que el óptimo social se alcanza, a pesar de no haberse coordinado para nada el consumo de los dos individuos.

El lector recordará ahora la razón entre los multiplicadores de *lagrange* de la simulación SIN MERCADO y su equiparación con los precios de mercado de ambos bienes en este modelo CON MERCADO, es decir:

$$\lambda_1/\lambda_2 = P_1/P_2$$

Diagramáticamente:



$$\text{tg } \alpha = \lambda_1/\lambda_2 = P_1/P_2 =$$
$$= -(dx^A_2/dx^A_1) = -(dx^B_2/dx^B_1) =$$
$$= TMS^A_{x1x2} = TMS^B_{x1x2}$$

Esto implica que las condiciones de óptimo son válidas cualquiera sea el escenario político - institucional de referencia: un modelo de economía centralmente planificada versus un modelo de economía descentralizada o de mercado. La discusión “mercado versus plan” debe por lo tanto no estar referida a la validez de estas condiciones de óptimo, sino a cual de los dos diseños institucionales permite alcanzarlas a menor costo o más eficazmente.

Al modelo descentralizado de mercado se le atribuye una enorme ventaja sobre la planificación central, debido al ahorro de información necesaria. El individuo solamente debe tener en cuenta su ingreso, y los precios relativos de los bienes a los que tiene acceso, junto al debido conocimiento de su disponibilidad en cantidad y calidad. Permite un escenario de amplia libertad, asegurando el cumplimiento del principio económico-democrático de la “soberanía del consumidor”. En la planificación central, el planificador debe reunir una enorme y engorrosa información sobre aspectos tecnológicos (funciones de utilidad de los individuos, disponibilidad de recursos, etc.) e introducir decisiones preferentes o meritorias sobre el nivel de utilidad a asegurar a los individuos de la sociedad.

En el modelo de mercado, la decisión descentralizada de cada individuo conduce al cumplimiento de las condiciones de óptimo general, sin necesidad de coordinación explícita entre ellos. Por su lado, al modelo de planificación central se le atribuye la ventaja de permitir un ajuste al equilibrio socialmente óptimo en presencia de externalidades tecnológicas y a la posibilidad de decisiones que afecten el nivel de ingreso de los individuos tendientes a cumplimentar políticas redistributivas. Pero este escenario no se corresponde con el planteado por la simulación previa, que solamente computa economías internas e ignora aspectos de equidad distributiva.

Finalmente, el alumno debe observar que en el planteo de optimización del modelo CON MERCADO, el multiplicador de lagrange λ_y nuevamente tiene un significado económico preciso: se trata de “la utilidad marginal del ingreso” para el individuo A. En efecto, si Y^o_A se transformara en variable, la derivada de la función objetivo daría:

$$\partial\mathcal{L}/\partial Y_A = \lambda_y$$

expresando λ_y el valor de la mejora en el nivel de utilidad que un mayor consumo de ambos bienes debido al mayor ingreso disponible generaría en el individuo A.

6. Optimización en el empleo de factores “sin mercado”

El desarrollo analítico de la optimización en el empleo de factores en la producción (en un modelo de dos bienes y dos factores de producción), es conceptualmente simétrico al visto para el caso antes visto de las decisiones de consumo entre bienes. En este acaso también puede analizarse el modelo SIN MERCADO y el modelo CON MERCADO. Comenzando con el primero, el planteo dispone de los siguientes datos:

$$X_1 = f_1\ (L_1; K_1)$$
$$X_2 = f_2\ (L_2; K_2)$$

que son las funciones de producción de los bienes X_1 y X_2, empleando a los dos factores de la producción L (trabajo) y K (capital).

$$L^o = L_1 + L_2$$
$$K^o = K_1 + K_2$$

Reflejan la dotación fija de factores ($L = L^o$; $K = K^o$) que se agotarán en su empleo en ambas líneas de producción.

El problema consiste en maximizar la producción de uno de los bienes sujeto a una cierta meta preestablecida en la producción del otro bien (para dar una solución única al problema de optimización), sujetos a las restricciones tecnológicas y de dotación de factores en la economía.

$$(MAX)\ X1 = f_1\ (L_1; K_1)$$

sujeto a:

$$(1^o)\ L^o - L_1 - L_2 = 0$$
$$(2^o)\ K^o - K_1 - K_2 = 0$$
$$(3^o)\ X^o{}_2 - f_2\ (L_2; K_2) = 0$$

La función auxiliar:

$$\mathcal{L} = f_1\ (L_1; K_1) + \lambda_L\ (L^o - L_1 - L_2) + \lambda_K\ (K^o - K_1 - K_2) + \lambda_{x2}\ (X^o{}_2 - f_2\ (L_2; K_2)$$

Las condiciones de primer orden:

(1) $\partial\mathcal{L}/\partial L_1 = f\ `_{(L1)} - \lambda_L = 0$

(2) $\partial\mathcal{L}/\partial K_1 = f\ `_{(K1)} - \lambda_K = 0$

(3) $\partial\mathcal{L}/\partial L_2 = - \lambda_L - \lambda_{x2}\ f\ `_{(L2)} = 0$

(4) $\partial\mathcal{L}/\partial K_2 = - \lambda_K - \lambda_{x2}\ f\ `_{(K2)} = 0$

(5) $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_L = L^o - L_1 - L_2 = 0$

(6) $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_K = K^o - K_1 - K_2 = 0$

(7) $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_{x2} = X^o{}_2 - f_2\ (L_2; K_2 = 0$

de donde:

$$f\ `_{(L1)} = \lambda_L$$
$$f\ `_{(K1)} = \lambda_K$$

o sea,

$$f\ `_{(L1)} / f\ `_{(K1)} = \lambda_L / \lambda_K$$

Despejando λ_{x2}:

$$\lambda_{x2} = - \lambda_L / f\ `_{(L2)} = - \lambda_K / f\ `_{(K2)}$$

sustituyendo λ_L y λ_K:

$$\lambda_{x2} = - f\ `_{(L1)} / f\ `_{(L2)} = - f\ `_{(K1)} / f\ `_{(K2)}$$

0 sea:

$$f\ `_{(L1)} / f\ `_{(K1)} = f\ `_{(L2)} / f\ `_{(K2)}$$

que es la condición de igualación de las productividades marginales relativas de los factores en la producción de ambos bienes.

Luego, hallando el diferencial total de las funciones de producción e igualándolo a cero, para hallar la Tasa Marginal de Sustitución de los Factores en la producción de los dos bienes (pendiente de las isocuantas en el punto de encuentro de la curva de contrato en la producción), se logra:

$$dX_1 = f'_{(L1)}\, dL_1 + f'_{(K1)}\, dK_1 = 0$$
$$dX_2 = f'_{(L2)}\, dL_2 + f'_{(K2)}\, dK_2 = 0$$

es decir,

$$f'_{(L1)}/f'_{(K1)} = f'_{(L2)}/f'_{(K2)} = - dK_1/dL_1 = - dK_2/dL_2 = TMS^{X1}_{LK} = TSM^{X2}_{Lk} = \lambda_L/\lambda_K$$

El alumno nuevamente debe recordar el significado económico de la relación λ_L/λ_K al momento de analizar el modelo con mercado, por su equiparación conceptual con la relación de precios de mercado de los factores. En el caso de optimización por cantidades, se trata de precios sombra, precios imputados, precios matemáticos o costos de oportunidad en el empleo de los factores. Si la restricción referida a la dotación de los factores se relajara permitiendo un aumento en la disponibilidad de los mismos, se puede deducir matemáticamente que se trata de la productividad marginal del factor que se hace variar, simplemente derivando la función objetivo por los parámetros L^o o K^o, según el caso, ahora transformados en variables.

7. Optimización en el empleo de factores "con mercado"

En el modelo de mercado, los empresarios adoptan decisiones propias de uso de factores de manera descentralizada, sin conocer ni tener necesidad de conocer las acciones de empleo de los factores de otros empresarios productores de otros bienes. Solamente es necesario dominar la tecnología disponible para la producción del bien que habrá de producir y la retribución que el mercado indica para los factores empleables en su línea de producción.

Suponiendo el productor del bien X_1, el planteo parte de los siguientes datos:

$$X_1 = f_1\,(L_1; K_1)$$
$$F^o = w.L_1 + r.K_1$$

dados: P_1, w y r. Siendo F^o el capital financiero disponible por el empresario para financiar el costo total de producción.

La función a maximizar:

$$(MAX)\ X1 = f_1\,(L_1; K_1)$$

sujeta a la condición:

$$F^o - w.L_1 - r.K_1 = 0$$

La función auxiliar:

$$\mathcal{L} = P_1.f_1\,(L_1; K_1) - w.L_1 - r.K_1 + \lambda_F\,(F^o - w.L_1 - r.K_1)$$

Las condiciones de primer orden:

$$\partial\mathcal{L}/\partial L_1 = P_1.f'_{(L1)} - w - \lambda_F.w = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial K_1 = P_1.f'_{(K1)} - r - \lambda_F.r = 0$$

$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_F = F^o - w.L_1 - r.K_1 = 0$

De donde surge:

$$P_1.f\,'_{(L1)} = w\,(1 + \lambda_F)$$
$$P_1.f\,'_{(K1)} = r\,(1 + \lambda_F)$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$[P_1.f\,'_{(L1)} / P_1.f\,'_{(K1)}] = [w\,(1 + \lambda_F)/r\,(1 + \lambda_F)]$$

$$f\,'_{(L1)} / f\,'_{(K1)} = w/r$$

Que expresa la condición de óptimo en el empleo de los factores, la igualación de la relación de sus productividades marginales directamente proporcionales a los precios relativos de sus servicios.

Diferenciando la función de producción e igualando a 0, para encontrar la Tasa Marginal de Sustitución de los factores:

$$dX_1 = f\,'_{(L1)}\,dL_1 + f\,'_{(K1)}\,dK_1 = 0$$

$$TMS^{X1}_{LK} = -\,dK_1/dL_1 = f\,'_{(L1)} / f\,'_{(K1)} = w/r$$

Dado que el productor de X_2 enfrenta los mismos precios relativos de los factores que el productor de X_1, se cumplirá que:

$$TMS^{X2}_{LK} = -\,dK_2/dL_2 = f\,'_{(L2)} / f\,'_{(K2)} = w/r = TMS^{X1}_{LK}$$

El sistema de precios del mercado habrá de lograr dar señales a los empresarios de manera de igualar las productividades marginales relativas de los factores en las diferentes líneas de producción, mediante un mecanismo descentralizado de adaptación en cantidades de tales agentes económicos.

8. Equilibrio general en presencia de bienes privados "sin mercado"

El siguiente es el caso de un cálculo de optimización en equilibrio general, es decir, teniendo en cuenta el lado de la producción y el consumo de bienes. Se presenta un modelo simple de dos bienes, dos factores y dos consumidores. Nuevamente en primer lugar se simula el caso de un modelo SIN MERCADO, en el que un planificador central reúne la siguiente información:

$$U_A = f_A\,(x^A{}_1;\, x^A{}_2)$$
$$U_B = f_B\,(x^B{}_1;\, x^B{}_2)$$

Representando las funciones de utilidad de los consumidores (el lado de la demanda de bienes), y:

$$X_1 = f_1\,(L_1;\, K_1)$$
$$X_2 = f_2\,(L_2;\, K_2)$$
$$L^o = L_1 + L_2$$
$$K^o = K_1 + K_2$$

reflejando las dos tecnologías disponibles para la producción de los bienes X_1 y X_2, que junto a la dotación de factores disponibles en la economía L^o y K^o, permiten construir la Función de Transformación en la Producción:

$$\theta(f_1; f_2; L^o; K^o) = 0$$

a la cual daremos una forma matemática simple y explícita para hacerla manipulable en el análisis, definiéndola como:

$$X^o = X_1 + X_2$$

Se trata de una función de transformación muy especial que habría de suponer una frontera de posibilidades de producción lineal y de pendiente igual a 45º (= -1). Este tipo de función habría de conducir a soluciones de esquina, pero hemos de obviar esta dificultad por razones de simplicidad en el análisis. Las implicancias conceptuales que se derivan a continuación, no se ven modificadas por este supuesto y sirven a los fines de interpretación de las condiciones de óptimo[7].

Para darle una solución única al proceso de optimización (definir un punto de la curva de contrato en el consumo), hemos de garantizar un cierto nivel de utilidad al individuo B ($U^o{}_B$), es decir:

$$U^o{}_B - f_B\,(x^B{}_1; x^B{}_2) = 0$$

de manera que el planteo consistirá en maximizar la utilidad del individuo A, sujeto a las restricciones tecnológicas, de dotación de recursos y de dicho nivel de utilidad para B.

La función auxiliar:

$$\mathcal{L} = f_A\,(x^A{}_1; x^A{}_2) + \lambda_{xo}\,(X^o - X_1 - X_2) + \lambda_B\,(U^o{}_B - f_B\,(x^B{}_1; x^B{}_2)$$

Las condiciones de primer orden:

$$\partial\mathcal{L}/\partial x^A{}_1 = f\,'_{(x^A{}_1)} - \lambda_{xo} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x^A{}_2 = f\,'_{(x^A{}_2)} - \lambda_{xo} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x^B{}_1 = -\,\lambda_{xo} - \lambda_B f\,'_{(x^B{}_1)} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x^B{}_2 = -\,\lambda_{xo} - \lambda_B f\,'_{(x^B{}_2)} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_{xo} = X^o - X_1 - X_2 = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_B = U^o{}_B - f_B\,(x^B{}_1; x^B{}_2 = 0$$

De donde surge:

$$f\,'(x^A{}_1) = \lambda_{xo}$$
$$f\,'(x^A{}_2) = \lambda_{xo}$$

o sea,

$$f\,'(x^A{}_1) = f\,'(x^A{}_2)$$

---

[7] Para extensiones ver Bator, F. M. (1957): "The Simple Analytics of Welfare Maximization", American Economic Review, V.47; y Bator, F. M (1958): "The Anatomy of Market Failure", Quarterly Journal of Economics, V. 72.

y también:

$$f`(x^A_1)/f`(x^A_2) = 1$$

Despejando f_B:

$$\lambda_{xo} = -\lambda_B f`(x^B_1) = -\lambda_B f`(x^B_2)$$

$$\lambda_B = -\lambda_{xo}/f`(x^B_1) = -\lambda_{xo}/f`(x^B_2)$$

o sea, volviendo a λ_{xo}:

$$\lambda_{xo} - \lambda_B . f`(x^B_2) = 0$$

Sustituyendo:

$$- f`(x^A_2) + [f`(x^A_1)/ f`(x^B_1)]\, f`(x^B_2) = 0$$

y reordenando:

$$f`(x^A_1)/ f`(x^A_2) = f`(x^B_1)/ f`(x^B_2) = 1$$

El resultado de igualdad con la unidad de las relaciones de utilidades marginales en el consumo de los dos bienes por ambos individuos es importante por lo que se demuestra al final.

Ahora, diferenciando las funciones de utilidad e igualando los diferenciales a 0, de obtienen las conocidas Tasas Marginales de Sustitución en el consumo de ambos bienes por ambos individuos. Es decir,

$$dU_A = f`_{(}x^A_{1)}.dx^A_1 + f`_{(}x^A_{2)}.dx^A_2 = 0$$
$$dU_B = f`_{(}x^B_{1)}.dx^B_1 + f`_{(}x^B_{2)}.dx^B_2 = 0$$

o sea:

$$TMS^A_{x1x2} = TMS^B_{x1x2}$$

Finalmente, si diferenciamos la Función de Transformación en la Producción e igualamos a 0 para movernos en la Frontera de Posibilidades de Producción, se obtiene:

$$dX^o = dX_1 + dX_2 = 0$$

Recuérdese que la $\partial X^o/\partial x_1 = \partial X^o/\partial x_1 = 1$. De lo cual resulta:

$$TMT^{X1X2} = - dX_2/dX_1 = 1$$

Pero recordando que:

$$f`(x^A_1)/ f`(x^A_2) = f`(x^B_1)/ f`(x^B_2) = 1$$

se deduce que:

$$TMT^{X1X2} = TMS^A_{x1x2} = TMS^B_{x1x2}$$

Esta es la condición de óptimo en la provisión de bienes privados en la economía. La igualación de las Tasas Marginales de Sustitución en el Consumo de los individuos con la Tasa Marginal de Transformación en la producción.

La condición indica claramente que cualquier intento de aumentar el consumo de un bien por parte de un individuo, exige la renuncia de cierta cantidad en el consumo del otro bien, y esa renuncia debe ser de magnitud suficiente como para que la producción, que dejará de producir esa cantidad marginal del otro bien, libere los recursos productivos (L y K) requeridos para producir la nueva unidad del bien demandado marginalmente.

9. Equilibrio general en presencia de bienes privados "con mercado"

En el modelo de equilibrio general con mercado, los consumidores y los productores adoptan decisiones de manera descentralizada. Los consumidores individualmente habrán de perseguir la maximización de su utilidad y los productores la maximización de su beneficio empresarial. Todos desconocen y no poseen información – o simplemente no les preocupa - de lo que hará o hace el resto de los agentes económicos, solamente les habrá de interesar sus posibilidades de consumo y/o de producción propios.

El planteo de optimización por lo tanto debe efectuarse separadamente para cada tipo de agente económico, consumidores y productores.

a) La firma

Comencemos por los productores y para simplificar supongamos una firma que produce dos bienes privados (X_1 y X_2), con la posibilidad de empleo de factores de la producción que acarrearán el pertinente costo de producción, el que deberá ser financiado con un cierto capital financiero que dispone la firma.

La función objetivo de la firma puede expresarse como:

$$(MAX)\ \Pi = (P_1 * X_1) + (P_2 * X_2) - C_1(X_1) - C_2(X_2)$$

Sujeto a la restricción de su capital financiero:

$$F^o - C(X_1) - C(X_2) = 0$$

La función auxiliar:

$$\mathcal{L} = (P_1 * X_1) + (P_2 * X_2) - C_1(X_1) - C_2(X_2) + \lambda_{F^o} [F^o - C(X_1) - C(X_2)]$$

Las condiciones de primer orden:

$$\partial\mathcal{L}/\partial x_1 = P_1 - \partial C_1/\partial x_1 - \lambda_{F^o} (\partial C_1/\partial x_1) = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial x_2 = P_2 - \partial C_2/\partial x_2 - \lambda_{F^o} (\partial C_2/\partial x_2) = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_{F^o} = F^o - C(X_1) - C(X_2) = 0$$

De donde surge:

$$P_1 = \partial C_1/\partial x_1 + \lambda_{F^o} (\partial C_1/\partial x_1) = CMg_{X1} + \lambda_{F^o} CMg_{X1}$$
$$P_2 = \partial C_2/\partial x_2 + \lambda_{F^o} (\partial C_2/\partial x_2) = CMg_{X2} + \lambda_{F^o} CMg_{X2}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$P_1/P_2 = CMg_{X1}/CMg_{X2}$$

La relación de precios de los bienes debe igualar a la relación directa de los respectivos costos marginales de producción. En rigor, en condiciones en que la restricción financiera sea "no operante" ($\lambda_{F^o} = 0$) cada bien será financiado de forma de igualar su precio a su costo marginal; si la restricción financiera resultara operante ($\lambda_{F^o} > 0$), entonces los costos marginales serán menores a los precios de ambos bienes, pero en tal caso el apartamiento del precio al costo marginal debe guardar una relación de proporcionalidad entre ambos bienes[8].

Ahora bien, ¿cual es la relación de la condición anterior con respecto a las magnitudes físicas de producción de X_1 y X_2? Para responder a esta pregunta debemos hallar el diferencial total de la restricción financiera e igualarla a cero, de forma de observar las posibilidades de transformación que tiene la firma en la producción de ambos bienes.

$$dF^o = \partial C_1/\partial x_1 . dX_1 + \partial C_2/\partial x_2 . dX_2 = 0$$

de donde surge:

$$TMT^{X1X2} = - dX_2/ dX_1 = CMg_{X1}/CMg_{X2}$$

Que de acuerdo a lo visto antes implica que:

$$TMT^{X1X2} = CMg_{X1}/CMg_{X2} = P_1/P_2$$

La firma optimiza la producción cuando iguala la relación de precios de mercado de ambos bienes con su Tasa Marginal de Transformación en la Producción.

b) Los consumidores

La optimización de los consumidores ya se ha desarrollado en el apartado II, de manera que se remite al alumno a dicho desarrollo. A manera de recordatorio, allí se concluyó que la condición de óptimo exige se cumpla la siguiente condición:

$$TMS^A_{x1x2} = - (dx^A_2/dx^A_1) = f\,'_{(}x^A_{1)} / f\,'_{(}x^A_{2)} = P_1/P_2$$
$$TMS^B_{x1x2} = - (dx^B_2/dx^B_1) = f\,'_{(}x^B_{1)} / f\,'_{(}x^B_{2)} = P_1/P_2$$

De allí que se cumpla:

$$TMS^A_{x1x2} = TMS^B_{x1x2} = P_1/P_2$$

c) equilibrio general

Reuniendo lo determinado para la firma y lo indicado respecto a los consumidores, se concluye que:

$$TMT^{X1X2} = TMS^A_{x1x2} = TMS^B_{x1x2} = P_1/P_2$$

Aquí se puede observar la virtud del mecanismo de mercado: el sistema de precios es el semáforo que guía el accionar de productores y consumidores en un mundo donde ninguno de ellos individualmente puede influir en modificar a gusto personal tales precios. En los modelos analizados se ha supuesto por tanto comportamientos competitivos, no hay situaciones monopólicas ni monopsónicas; los agentes económicos son tomadores de precios y ajustadores de cantidades. En tal escenario, en el caso de los bienes privados, el accionar descentralizado de productores y consumidores conduce al óptimo social.

[8] Volver a ejemplo presentado en la Introducción.

10. Equilibrio general en presencia de bienes públicos: las condiciones samuelsonianas

En este apartado final se considera la presencia de "bienes públicos"[9]. El desarrollo analítico de este problema permitirá observar con cierto rigor las condiciones de óptimo requeridas para su provisión. Las condiciones "paretianas" para su provisión han sido bautizadas como "*condiciones samuelsonianas*" en reconocimiento a quien las planteara muy clara y didácticamente en un par de artículos muy conocidos[10].

El planteo de equilibrio general, computa nuevamente las funciones de comportamiento de los consumidores, es decir, relacionadas con el lado de la demanda de los bienes (las funciones de utilidad) y el lado de la oferta o de la producción, en un modelo de dos individuos (A y B); dos bienes: un bien privado (X) y un bien público G; dos tecnología para la producción de cada bien (f_X y f_G); y, una cierta dotación de factores L° y K°.

Las funciones de utilidad:

$$U_A = f_A\,(X^A; G)$$
$$U_B = f_B\,(X^B; G)$$

En las que el bien G es el bien público, un mismo bien de consumo compartido o conjunto entre A y B.

Las funciones de producción de ambos bienes:

$$X = f_X\,(L_X; K_X)$$
$$G = f_G\,(L_G; K_G)$$

La dotación de factores:

$$L^o = L_X + L_G$$
$$K^o = K_X + K_G$$

La función de transformación:

$$\theta\,(f_X; f_G; L^o; K^o) = 0$$

A la que nuevamente le daremos una forma explícita simple y fácilmente manipulable:

$$R^o - X - G = 0$$

Tratándose de dos individuos, hemos de asegurar un nivel U^o_B de utilidad para el individuo B y se deberá alcanzar la maximización de la utilidad del individuo A, sujeta al indicado nivel de utilidad de B, y de las posibilidades de producción de ambos bienes en la economía.

Construyendo la función auxiliar:

---

[9] Los "bienes públicos" son de consumo conjunto, no hay rivalidad en el consumo del bien. Una vez que el mismo ha sido provisto, la utilidad que genera su provisión es compartida y usufructuada por todos los consumidores sin que pueda ninguno ser excluido de ese beneficio (no debido a un "derecho" que pudiere asistirle a cualquier individuo para acceder a su consumo, sino a la imposibilidad material, física o económica, de poder excluirlo). La exclusión no será posible a pesar que no demuestre voluntad de contribuir a su financiamiento (disposición de pago voluntario o revelación de preferencias en el mercado).

[10] Samuelson, P. A. (1954) y (1955).

$\mathcal{L} = f_A (X^A; G) + \lambda_R (R^o - X - G) + \lambda_B (U^o{}_B - f_B (X^B; G^B)$

Las condiciones de primer orden:

$\partial\mathcal{L}/\partial X^A = f\,'_{(XA)} - \lambda_R = 0$
$\partial\mathcal{L}/\partial G = f\,'_{(GA)} - \lambda_R - \lambda_B\, f\,'_{(GB)} = 0$
$\partial\mathcal{L}/\partial X^B = - \lambda_R - \lambda_B\, f\,'_{(XB)} = 0$
$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_R = R - X - G$
$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_B = U^o{}_B - f_B (X^B; G^B) = 0$

de donde se desprende:

$f\,'_{(XA)} = \lambda_R$
$f\,'_{(GA)} - \lambda_R - \lambda_B\, f\,'_{(GB)} = f\,'_{(GA)} - f\,'_{(XA)} - \lambda_B\, f\,'_{(GB)} = 0$
$\lambda_B = - f\,'_{(XA)}/f\,'_{(XB)}$

Por lo tanto:

$$f\,'_{(GA)} - f\,'_{(XA)} \quad + (f\,'_{(XA)}/f\,'_{(XB)}).\ f\,'_{(GB)} = 0$$

Dividiendo por $f\,'_{(XA)}$:

$$(f\,'_{(GA)}/f\,'_{(XA)}) - 1 + (f\,'_{(GB)}/f\,'_{(XB)}) = 0$$

o sea:

$$(f\,'_{(GA)}/f\,'_{(XA)}) + (f\,'_{(GB)}/f\,'_{(XB)}) = 1$$

Que en virtud de la relación inversa entre las razones de las utilidades marginales de ambos bienes y las tasas de cambio en cantidades deseadas por los individuos (Tasas Marginales de Sustitución en el consumo entre el bien privado y el bien público), resulta:

$$TMS^A{}_{XG} + TMS^B{}_{XG} = 1$$

Si ahora diferenciamos la función de transformación e igualamos a 0:

$$dR^o = dX + dG = 0$$

Recuérdese que $\partial R^o/\partial X = \partial R^o/\partial G = 1$; luego se concluye que:

$$TMT^{XG} = - dX/dG = 1$$

Y, consecuentemente, por lo visto antes:

$$TMT^{XG} = TMS^A{}_{XG} + TMS^B{}_{XG}$$

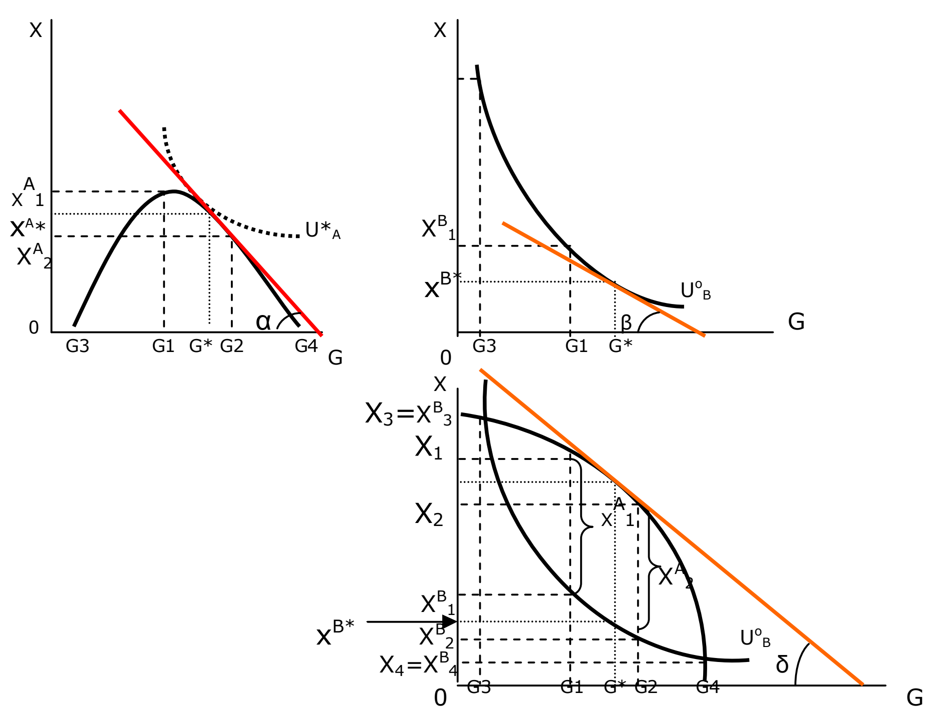
Esta es la condición de provisión óptima de bienes en presencia de bienes públicos. Las renuncias al consumo de bienes privados por parte de los individuos A y B para poder producir el bien público, se suman para de esta manera contribuir a su financiamiento. Se trata de renuncias "deseadas" por los individuos, aunque las características de no exclusión de los bienes públicos no los incentive a revelar esos deseos de forma voluntaria. Más bien, a la inversa, la posibilidad de no ser excluidos de los beneficios que provee el bien público, genera un incentivo perverso de conductas "*free-rider*" (polizonte). Por este motivo la provisión de los bienes públicos no es factible de ser canalizada mediante el mecanismo de mercado, tal cual opera en el caso de los bienes privados, pues al no haber incentivo a revelar las preferencias, no es posible financiar voluntariamente su producción. Sin embargo, dado que los bienes comunes son necesarios y en el fondo deseados por los individuos, el arreglo constitucional incluye el consenso general para proveer estos bienes mediante su financiamiento coactivo, es decir, a través del pago de impuestos.

Finalmente, las condiciones samuelsonianas indicadas previamente, requerirían el empleo del "método del beneficio" en la provisión de este tipo de bienes, es decir, la distribución de la carga de los impuestos debería estar en correspondencia con el beneficio recibido con su provisión. De esa manera cada individuo (A y B) se sentiría en equilibrio, de forma que los impuestos que el gobierno les obligara pagar estarían en correspondencia con sus respectivas TMS_{XG}, es decir, de acuerdo con las indicadas en la expresión final antes aludida (TMS^{A}_{XG}; TMS^{B}_{XG}).

Las condiciones samuelsonianas se pueden encontrar a través del sistema de tres diagramas sugerido por Samuelson (1955), y mediante un procedimiento iterativo de sucesivas aproximaciones. El procedimiento es suponer diferentes niveles de bienes públicos que implican diferentes cantidades de bienes privados disponibles para el consumo de ambos individuos, pero considerando la restricción de asegurar a uno de los individuos (B) un nivel dado de utilidad (U^{o}_{B}).

De las iteraciones surgen los niveles de G* y X*, que permitiendo asegurar a B el nivel U^{o}_{B}, maximiza el nivel de utilidad de A (en U^{A*}). Las tangentes de los ángulos α y β, indican las respectivas TMS^{A}_{XG} y TMS^{B}_{XG}. La tangente del ángulo δ indica la TMT^{XG}. La suma de los valores absolutos de las tangentes de α y β, equivalen al valor absoluto de la tangente de δ, indicando el cumplimiento de la condición:

$$TMT^{XG} = TMS^{A}_{XG} + TMS^{B}_{XG}$$



De las tangentes marcadas en los diagramas, habrá de notarse que:

$$TMS^{A}_{XG} \neq TMS^{B}_{XG}$$

circunstancia que diferencia esta solución al caso de los bienes privados. Este es un resultado lógico por cuanto en el caso de los bienes privados la igualación marginal de las tasas de sustitución derivan de la posibilidad que tiene cada individuo de dimensionar las cantidades consumidas de cada bien, en tanto en el caso de los bienes públicos todos los individuos estarán consumiendo conjuntamente la misma cantidad del bien, circunstancia que naturalmente arrojará diferentes valoraciones de cada individuo respecto a la utilidad que ese bien público le genera.